Herkansingstentamen Discrete Structuren

woensdag 21 juni 2000, 9 - 12 uur

Elke opgave levert maximaal 15 punten op. Het cijfer is het aantal punten gedeeld door 10, afgerond op gehele en halve waarden, met als maximum 10 (bij 98 punten of meer).
NB. Er gelden voor dit herkansingstentamen **geen vrijstellingen** op grond van behaalde toetsresultaten.

1. Laat mbv. een tegenvoorbeeld zien dat

$$A \ominus (B \cup C) = (A \ominus B) \cup C$$

niet algemeen geldt.

2. Beschouw de formule

$$((p \to q) \vee r)) \leftrightarrow ((p \to r) \vee q)$$

a. Bewijs mbv. een waarheidstabel (truth table) dat deze formule een tautologie is.
b. Geef een lineair geannoteerd bewijs voor deze formule.

3. Bewijs met volledige inductie dat voor alle $n \in N$ geldt:

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$$

4. a. Wat is een invariant?

b. Beschouw het volgende programmafragment (m, n zijn gehele getallen):

```
while  0 < n  do
   m := m + n
   n := m - n
   m := m - n
```

Laat zien dat $m - n = 5$ een invariant is.

5. G is een eindige ongerichte graaf. Beschouw de formule

$$\sum_{v \in V(G)} deg(v) = 2 \cdot |E(G)|$$

a. Leg uit wat $V(G)$, $E(G)$ en deg betekenen.
b. Bewijs de formule.

Z. O. Z.

6. Geef een expliciete formule voor s_n, gegeven door

$$
\begin{aligned}
&s_0 = 1\\
&s_1 = 1\\
&s_n = s_{n-1} + 2s_{n-2} \quad \text{voor} \quad n \geq 2
\end{aligned}
$$

7. Zij $V = \{1, \ldots, 100\}$, en zij $R \subseteq \wp(V^2)$ gedefinieerd door

$$R = \{(m,n) \in V^2 \ : \ 7|(m-n)\}$$

   a. Bewijs dat R een equivalentie-relatie is.
   b. Hoe ziet de door R gegenereerde partitie van V eruit?

8. a. Geef een definitie van het begrip Boole-algebra.
   b. Leg uit wat het dualiteitsprincipe voor Boole-algebra's inhoudt.

TABLE 1. Logical Equivalences

1.	$\neg\neg p \iff p$	double negation
2a.	$(p \vee q) \iff (q \vee p)$	commutative laws
b.	$(p \wedge q) \iff (q \wedge p)$	
c.	$(p \leftrightarrow q) \iff (q \leftrightarrow p)$	
3a.	$[(p \vee q) \vee r] \iff [p \vee (q \vee r)]$	associative laws
b.	$[(p \wedge q) \wedge r] \iff [p \wedge (q \wedge r)]$	
4a.	$[p \vee (q \wedge r)] \iff [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$	distributive laws
b.	$[p \wedge (q \vee r)] \iff [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$	
5a.	$(p \vee p) \iff p$	idempotent laws
b.	$(p \wedge p) \iff p$	
6a.	$(p \vee \mathbf{0}) \iff p$	identity laws[1]
b.	$(p \vee \mathbf{1}) \iff \mathbf{1}$	
c.	$(p \wedge \mathbf{0}) \iff \mathbf{0}$	
d.	$(p \wedge \mathbf{1}) \iff p$	
7a.	$(p \vee \neg p) \iff \mathbf{1}$	
b.	$(p \wedge \neg p) \iff \mathbf{0}$	
8a.	$\neg(p \vee q) \iff (\neg p \wedge \neg q)$	DeMorgan laws
b.	$\neg(p \wedge q) \iff (\neg p \vee \neg q)$	
c.	$(p \vee q) \iff \neg(\neg p \wedge \neg q)$	
d.	$(p \wedge q) \iff \neg(\neg p \vee \neg q)$	
9.	$(p \to q) \iff (\neg q \to \neg p)$	contrapositive
10a.	$(p \to q) \iff (\neg p \vee q)$	implication
b.	$(p \to q) \iff \neg(p \wedge \neg q)$	
11a.	$(p \vee q) \iff (\neg p \to q)$	
b.	$(p \wedge q) \iff \neg(p \to \neg q)$	
12a.	$[(p \to r) \wedge (q \to r)] \iff [(p \vee q) \to r]$	
b.	$[(p \to q) \wedge (p \to r)] \iff [p \to (q \wedge r)]$	
13.	$(p \leftrightarrow q) \iff [(p \to q) \wedge (q \to p)]$	equivalence
14.	$[(p \wedge q) \to r] \iff [p \to (q \to r)]$	exportation law
15.	$(p \to q) \iff [(p \wedge \neg q) \to \mathbf{0}]$	reductio ad absurdum